

Vorlesung Elektrodynamik SS 2003

Elektrostatik in Dielektrika

- 1) In dielektrischen Medien werden Ladungen durch das elektrische Feld aus ihren Gleichgewichtslagen verschoben (Dipole induziert) oder bestehende Dipole im Feld partiell ausgerichtet. Diese Dipole erzeugen ein Polarisationsfeld (Dipoldichte)

$$\vec{P}_D(\vec{r}) = \sum_i \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

- 2) Bei Mittelung über ein genügend großes Raumgebiet (makroskopische Elektrodynamik) lässt sich mit einer gemittelten Polarisationsdichte

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{P}_D(\vec{r} + \vec{r}') dV'$$

ein gemitteltes Potential berechnen. Daraus liest man die Polarisationsladungen

$$\rho_{\text{pol}}(\vec{r}) = -\text{div} \vec{P}(\vec{r}); \quad \eta_{\text{pol}}(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_n$$

ab, die nun zusätzlich zu den externen Ladungen auftreten. Sie sind Senken des Polarisationsfeldes und zusätzliche Quellen des elektrischen Feldes.

- 3) Die Maxwellgleichungen der Elektrostatik in Dielektrika lauten nun:

$$\text{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{div} \vec{D}(\vec{r}) = \rho_{\text{ext}}$$

mit der dielektrischen Verschiebung $\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$.

- 4) Für Verschiebungs- und Orientierungspolarisationen gelten in linearen, isotropen Medien die äquivalenten Materialgleichungen

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$$

mit $\epsilon(\vec{r}) = 1 + \chi(\vec{r})$.

- 5) An den Grenzflächen zweier Dielektrika gelten die Übergangsbedingungen:

$$D_{n2}(\vec{r}) - D_{n1}(\vec{r}) = \eta_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad E_{t2}(\vec{r}) = E_{t1}(\vec{r})$$

- 6) Die Potentialberechnung in homogenen Medien erfordert die Lösung der Poissongleichung:

$$-\epsilon_0 \epsilon \Delta \varphi(\vec{r}) = \rho_{\text{ext}}(\vec{r}) .$$

- 7) Für Probleme mit stückweise konstantem $\epsilon(\vec{r}) \rightarrow \epsilon_i$ löst man die Gleichung in allen Gebieten und hat zusätzlich die Übergangsbedingungen an den Grenzflächen zu erfüllen.
- 8) Die Methode der Greenschen Funktion (GF) stellt eine Möglichkeit dar, das Problem zu lösen, wobei zu beachten ist, dass für jedes Gebiet eine Greensche Funktion gemäß

$$-\epsilon_0 \epsilon_i \Delta G_i(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \text{wenn im Gebiet 'i' eine externe Ladung existiert,}$$

$$-\epsilon_0 \epsilon_j \Delta G_j(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \text{wenn im Gebiet 'j' keine externe Ladung existiert}$$

mit den natürlichen Randbedingungen zu bestimmen ist. Für die Greenschen Funktionen gelten entsprechende Übergangsbedingungen.

- 9) Die elektrostatische Energie im Dielektrikum ergibt sich zu

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) dV \quad \text{oder} \quad W = \frac{1}{2} \int \rho_{\text{ext}}(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV .$$

- 10) Die Kraftdichte im Dielektrikum kann mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors durch Feldgrößen ausgedrückt werden

$$f_i(\vec{r}) = T_{ij,j}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad T_{ij}(\vec{r}) = E_i(\vec{r}) D_j(\vec{r}) - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k(\vec{r}) D_k(\vec{r}) .$$

- 11) Die Kraft auf die Oberfläche eines dielektrischen Volumens erhält man dann als

$$F_i = \int_{(V)} T_{ij}(\vec{r}) df_j .$$