

## Elektrostatik im Vakuum

**Aufgabe:** Berechnung der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r})$  aus der vorgegebenen Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}')$ .

$$\boxed{\rho(\vec{r}')} \longrightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r})}$$

- 1) Die Ladungen sind die Quellen des elektrostatischen Feldes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

- 2) Das elektrische Feld genügt den *integralen Maxwell'schen Gleichungen* der Elektrostatik im Vakuum  $\longrightarrow$  globale Beschreibung

- a) Gauß'sches Durchflutungsgesetz

$$\epsilon_0 \int_{(V)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = Q_V = \int_V \rho(\vec{r}') dV'$$

Der Fluß des elektrischen Feldes durch die Oberfläche eines *beliebigen* Volumens ist gleich der *eingeschlossenen* Ladung.

- b)

$$\int_{(F)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Das elektrostatische Feld ist wirbelfrei.

- 3) Die *differentiellen* Maxwell'schen Gleichungen stellen eine lokale Beschreibung dar und verbinden das Feld an benachbarten Orten ( $\vec{E}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{E}(\vec{r} + d\vec{r})$ )

- a)

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

- b)

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

- 4) Das elektrostatische Feld besitzt ein Potential  $\varphi$ .

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) \Leftrightarrow \varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

Das Potential kann geeicht werden, d.h.,  $\varphi' = \varphi + C$  führt zum gleichen  $\vec{E}$ -Feld. Hier ist  $\varphi(\infty) = 0$  gewählt worden.

- 5) Aus der Definition des Potentials und der Maxwell-Gleichung a) folgt die *Poissongleichung*

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Die Lösung für natürliche Randbedingungen lautet

$$\varphi(\vec{r}) = \int G_0(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

mit der Greenschen Funktion der Poissongleichung im Vakuum

$$G_0(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- 6) Für eine endliche (begrenzte) Ladungsverteilung läßt sich das Potential außerhalb der Ladungsverteilung in eine unendliche Summe von Multipolpotentialen entwickeln, die die Multipolmomente der Ladungsverteilung und die Aufpunkteigenschaften enthalten.

Im allgemeinen (genügend große Entfernung von der Ladungsverteilung) kann die Entwicklung nach wenigen Termen abgebrochen werden:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} D_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right)$$

Die wichtigsten Multipolmomente sind:

$$Q = \int \rho(\vec{r}') dV' \quad \text{Ladung}$$

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad \text{Dipolmoment}$$

$$D_{ij} = \int (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\vec{r}') dV' \quad \text{Quadrupoltensor}$$

7) Die elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung ergibt sich zu:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_\rho} \int_{V_\rho} \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_\rho} \rho(\vec{r}') \varphi(\vec{r}') dV' \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{V_\infty} \vec{E}^2(\vec{r}') dV' \quad \Rightarrow \text{Feldenergie}$$

8) Die Energie einer Ladungsverteilung in einem vorgegebenen, äußeren elektrischen Feld ergibt sich daraus durch Weglassen des Faktors  $\frac{1}{2}$ .

Speziell kann man die Energie einer eng begrenzten Ladungsverteilung im äußeren Feld am Ort  $\vec{r}$ , die Kraftwirkung und das Drehmoment auf die Ladungsverteilung im Sinne der Multipolentwicklung schreiben als

$$\begin{aligned} W_{\vec{r}} &= Q_{\vec{r}} \varphi(\vec{r}) - \vec{p}_{\vec{r}} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{F}_{\vec{r}} &= Q_{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{p}_{\vec{r}} \cdot \text{grad}) \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{M}_{\vec{r}} &= \vec{p}_{\vec{r}} \times \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

9) Für den wichtigen Spezialfall eines Dipols in einem äußeren Feld am Ort  $\vec{r}$  gilt:

a) Energie

$$W_{\vec{r}} = -\vec{p}_{\vec{r}} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

b) Kraft

$$\vec{F}_{\vec{r}} = (\vec{p}_{\vec{r}} \cdot \text{grad}) \vec{E}(\vec{r})$$

c) Drehmoment

$$\vec{M}_{\vec{r}} = \vec{p}_{\vec{r}} \times \vec{E}(\vec{r})$$