

Vorlesung Elektrodynamik SS 2003

Elektromagnetische Wellen

- 1) Im ladungs- und stromfreien Raum genügen die Potentiale und Felder im Vakuum homogenen partiellen Differentialgleichungen. Für den Fall der Coulomb-Eichung ($\text{div } \vec{A} = 0$) gilt z.B. (alle Größen hängen von \vec{r} und t ab)

$$\Delta \phi = 0, \quad \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

- 2) Mit natürlichen Randbedingungen folgen daraus als einfachste Lösungen $\phi = 0$ und transversale (wegen der Coulomb-Eichung gilt $\vec{k} \perp \vec{e}_i$) ebene, monochromatische Wellen

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 a_j(\vec{k}) \vec{e}_j(\vec{k}) e^{i[\vec{k}(\omega)\vec{r} - \omega t]} + c.c.,$$

die der Dispersionsrelation $k = \omega/c$ genügen müssen. Diese Lösungen stellen Normalmoden dar, die zur Konstruktion beliebiger raum-zeitlich lokalisierter Wellenfelder benutzt werden können.

- 3) Die Felder \vec{E} und \vec{B} ergeben sich aus

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

sind auch ebene Wellen und bilden mit \vec{k} ein rechtshändiges Dreibein.

- 4) In einem linearen, lokalen, nicht magnetisierbaren ($\vec{M} \equiv 0$), isotropen Medium gilt im Transparenzbereich $\vec{\epsilon}(\vec{r}, \omega) = \mathfrak{R} \vec{\epsilon}(\vec{r}, \omega) \doteq \epsilon(\omega)$. Die Wellengleichung für das elektrische Feld lautet dann im Fourierraum:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0,$$

mit den transversalen Normalmoden

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \sum_{j=1}^2 a_j(\vec{k}) \vec{e}_j(\vec{k}) e^{i[\vec{k}(\omega)\vec{r}]}$$

als Lösung und der nichttrivialen Dispersionsrelation $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)$.

- 5) Das Potential einer monochromatisch mit der Frequenz ω schwingende Ladungs- und Stromverteilung kann aus den retardierten Potentialen gewonnen werden. Für kleine Ladungsverteilungen ergibt sich in elektrischer Dipolnäherung

$$\vec{A}_D(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} (-i\omega) \vec{p} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r},$$

wobei die Multiplikation mit $(-i\omega)$ im stationären Fall oder im Fourierraum einer zeitlichen Differentiation des Dipolmomentes entspricht.

- 6) Das Nahfeld ($kr \ll 1$)

$$\vec{B}_D(\vec{r}, t) \approx i \frac{\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p} \right) \frac{1}{r^2} e^{-i\omega t},$$

$$\vec{E}_D(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{\vec{r}}{r} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{p} \right) - \vec{p} \right] \frac{1}{r^3} e^{-i\omega t}$$

ist äquivalent zum statischen Dipolfeld, oszilliert mit dessen Frequenz und 'hängt' an der Quelle.

- 7) Das Fernfeld ($kr \gg 1$) tritt in Form von transversalen Kugelwellen auf

$$\vec{B}_D(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \omega^2 \vec{p} \right) \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)},$$

$$\vec{E}_D(\vec{r}, t) \approx c \vec{B}_D(\vec{r}, t) \times \frac{\vec{r}}{r}$$

wobei wieder (ω^2) auf eine zweite zeitliche Ableitung des Dipolmomentes hinweist, d.h., nur beschleunigte Ladungen strahlen Wellen ab.

- 8) Die Potentiale einer bewegten Punktladung (Lienard-Wichert-Potentiale) sind gegeben durch

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\left\{ \left| \vec{r} - \vec{R}(\tau) \right| - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial \tau} \cdot \left[\vec{r} - \vec{R}(\tau) \right] \right\}},$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial t} \varphi(\vec{r}, t)$$

wobei $\tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{R}(\tau)|}{c}$ die retardierte Zeit und $\vec{R}(\tau)$ die Bahnkurve zur retardierten Zeit darstellen.