

Vorlesung Elektrodynamik SS 2003

Elektrostatik bei Anwesenheit von Leitern

- 1) Ladungen in Leitern sind an Oberflächen lokalisiert. (Flächenladungsdichte $\eta(\vec{r})$, Potential konstant)

- 2) Leiter sind feldfrei, damit sind Leiteroberflächen Äquipotentialflächen.

- 3) An Leiteroberflächen gilt:

$$\eta(\vec{r}) = E_n(\vec{r}) = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial n}, \quad E_t = 0,$$

wobei der Normalenvektor vom Leiter weg zeigt.

- 4) Die Potentialberechnung besteht in der Lösung eines Randwertproblems:

$$-\epsilon_0 \Delta \phi(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

mit ϕ_i oder Q_i vorgegeben auf den Leiteroberflächen.

- 5) Die Methode der Greenschen Funktion (GF) stellt eine Möglichkeit dar, das Problem zu lösen.

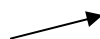
a) Formale Lösung des Problems

$$-\epsilon_0 \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow$$

G ist das Potential einer Einheitsladung

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G_0(\vec{r}, \vec{r}') + F(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}')$$



GF des homogenen Raums, erfüllt DGL

$$\Delta F(\vec{r}, \vec{r}') = 0,$$

d.h. Quellen dürfen nicht in V liegen;
Freiheit, um Randbedingungen zu erfüllen

Fordert man Dirichletsche Randbedingungen, also $G(\vec{r}, \vec{r}') \stackrel{!}{=} 0$ auf (V) , folgt daraus sofort die formale Lösung des Problems

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' - \epsilon_0 \sum_i \varphi_i \int_{(V_i)} \frac{\partial G}{\partial n'} d f' \\ &= \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' + \sum_i \varphi_i \Gamma_i(\vec{r})\end{aligned}\quad (1)$$

Für Dirichletsche Randbedingungen gilt: $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$, d.h., Quell- und Aufpunkt sind zu vertauschen.

Man unterscheidet zwei Arten von Randbedingungen:

i) φ_i vorgegeben. Einsetzen in (1) liefert die Lösung.

ii) Q_i vorgegeben $\rightarrow \varphi_i$ berechnen

$$\varphi_i = C_{ij}^{-1} (Q_j - Q_{j,\text{inf}}),$$

wobei $Q_{i,\text{inf}}$ aus $\varphi_\rho = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$ über die influenzierte Ladungsdichte folgt.

$$C_{ij} = \epsilon_0^2 \int_{(V_i)} \int_{(V_j)} \frac{\partial}{\partial n_j} \frac{\partial}{\partial n_i} G(\vec{r}, \vec{r}') d f d f' \quad \text{Kapazitätskoeffizienten}$$

b) Berechnung der GF.

GF oft schwer zu bestimmen. Hier im Prinzip immer Potential einer Punktladung in der vorgegebenen Konfiguration \rightarrow **Methode der Spiegelladung**

Für berechnetes G immer zeigen:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r}) \text{ und } G(\vec{r}, \vec{r}')|_{\vec{r}' \in (V)} = G(\vec{r}, \vec{r}')|_{\vec{r} \in (V)} = 0$$

6) Die Lösung raumladungsfreier Probleme lautet:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i \Gamma_i(\vec{r})$$

mit vorgegebenem φ_i auf dem Leiter i oder $\varphi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} Q_j$ bei vorgegebener Ladung auf dem Leiter 'i'.

7) Die elektrostatische Energie ergibt sich zu

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} \varphi_i \varphi_j \text{ oder } W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij}^{-1} Q_i Q_j$$

und damit bei raumladungsfreien Problemen zu

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} \varphi_i \varphi_j \text{ oder } W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij}^{-1} Q_i Q_j.$$